ESSERI GEOMETRICI

Discorso inaugurale del Prof. Giuseppe Marletta

Eccellenze, Signore, Signori,

Quando il M.co Rettore m' invitò a tenere questo discorso inaugurale, compresi subito la grave difficoltà alla quale andavo incontro accettando l' onorifico incarico: parlare di Geometria ad un pubblico colto ma non matematico.

Nondimeno io spero che i fatti dei quali parlerò possano risultare non privi d' interesse.

1. Una volta lessi, in un vecchio libro di Geometria, le seguenti parole che, sebbene io allora fossi quasi ragazzo, m' impressionarono molto e molto mi fecero pensare accogliendole con entusiasmo.

Eccole :

« Le proposizioni di una scienza sono tanto più probabilmente vere, quanto minore è il numero dei postulati di questa ».

Son passati molti anni, ed io ripensando a queste parole, applicate alla Geometria, non soltanto vedo svanito il mio entusiasmo, ma osservo che esse non sono affatto applicabili alla Geometria così quale oggidì essa è.

E invero sin poco dopo la metà del secolo scorso, le figure geometriche, che d' ora in poi chiameremo *esseri geometrici,* erano presentate come enti, la cui esistenza era fuori

di noi; ad esse si attribuivano, senza dimostrarle, poche proposizioni, dette *assiomi* alcune, *postulati* le rimanenti; tutte erano dedotte per induzione sperimentale da certe qualità fisiche. Le prime erano evidenti per se stesse, cioè erano certamente vere; le seconde, invece, si accettavano *per comune consenso*. Ne segue che sulla esattezza di queste poteva sorgere qualche dubbio, perchè in sostanza i postulati attribuivano certe proprietà a cose, la cui esistenza era *indipendente* da queste; onde è giusto e di grande valore ciò che affermano quelle parole che io lessi, se esse sono riferite alla Geometria così come veniva stabilita, Geometria che a ragione PIERI chiamò *fisica dell' estensione*.

Ma un altro indirizzo, moderno, presenta la Geometria come scienza *puramente deduttiva* indipendente da ogni concezione fisica. Questo nuovo indirizzo (che per la Geometria Elementare è dovuto a PEANO, PIERI, HILBERT (1), e per la Geometria Proiettiva a STAUDT e, poi, a CAYLEY, KLEIN, DE PAOLIS, PIERI (2)), presenta gli esseri geometrici come vere creazioni del nostro intelletto! La Geometria, insomma, si

---

(1) Cfr. p. es.: PEANO, *Principî di Geometria logicamente esposti* [Torino, Fratelli Bocca (1889)]; PIERI, *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo* [Memorie della R. Accademia di Torino, serie II, tomo XLIX (1899)] e *La Geometria elementare istituita sulle nozioni di « punto » e « sfera »* [Memorie della Società italiana delle Scienze, serie 3ª, tomo XV (1908)]. Cfr. anche i miei *Principî di Geometria euclidea* [Periodico di Matematica, vol. XX (1905)].

(2) STAUDT, *Die Geometrie der Lage* [Nürnberg (1847)], e *Beiträge zur Geometrie* [Ivi (1857-60)]; PIERI, *I principî della Geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo* [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, tomo XLVIII (1898)], e *Nuovi principî di Geometria projettiva complessa* [Ivi, serie II, tomo LV (1905)]. Cfr. pure le mie *Lezioni di Geometria Proiettiva* [Circolo Matematico di Catania (1931)].

presenta come un sistema logico ipotetico deduttivo; cioè: ammesse per alcuni enti non definiti (*enti primitivi* o *punti*) alcune proposizioni (indipendenti) non dimostrate (dette *postulati*) ma tra loro *compatibili*, la Geometria si sviluppa deducendola da queste con la logica pura più rigorosa!

Mi si potrebbe obbiettare che, così concepita, la Geometria è un'arbitraria creazione dell'umano intelletto; sta bene, proprio così, ma per fortuna della Geometria e per fortuna nostra le proposizioni geometriche vengono applicate ai fatti della nostra vita con quella immensa utilità che è a tutti evidente appena si dia uno sguardo ai grandi progressi delle scienze fisiche e delle scienze che da queste dipendono.

Alla Geometria, cosi come modernamente è intesa, possiamo dunque applicare le parole da me lette in quel vecchio libro? No; no, perchè essendo la Geometria una pura concezione del nostro intelletto, e non essendovi tra le sue proposizioni contradizione alcuna, queste sono certamente vere, vere qualunque sia il numero dei suoi postulati. Certo che questo numero ha la sua importanza, ma non per l'esattezza dei fatti affermati, perchè, invece, quanto minore è il numero dei postulati, tanto maggiore è il numero delle specie di enti che possono fungere da enti primitivi.

Ne segue ancora che gli esseri geometrici *certamente esistono,* perchè essi sono una creazione del nostro intelletto per la quale non si è fatto uso di proposizioni tra loro contradittorie, cioè dell'assurdo, e nel nostro intelletto, anche secondo Leibniz ed Hegel, una sola cosa non esiste: l'assurdo!

2. Se volessimo l'atto di nascita dei primi esseri geometrici, lontani antenati dei moderni, bisognerebbe affidarci al celebre *Papiro Rhind,* manuale aritmetico-geometrico redatto

dallo scriba egiziano AHMES (3) e dedicato agli agricoltori, manuale che risale a circa 4000 anni or sono e che fu scoperto in uno dei grandi monumenti sepolcrali della terra del Nilo. Da esso rilevasi che la Geometria nacque in Egitto, e ciò viene confermato da ERODOTO che ivi viaggiò verso il 460 a. C., da DEMOCRITO, PLATONE, ARISTOTELE, ERONE ALESSANDRINO, STRABONE, DIODORO SICULO.

I primi esseri geometrici furono studiati per ripristinare i confini dei varî terreni esistenti presso il Nilo, confini ogni anno cancellati dalle alluvioni di questo grande fiume. Gli esseri geometrici che via via nacquero si diffusero, immediatamente dopo, tra il Tigri e l' Eufrate, sebbene essi dagli Assiri e dai Babilonesi fossero applicati agli astri nella speranza di leggere in questi il destino delle umane vicende! Ma la terra nella quale gli esseri geometrici ebbero splendido sviluppo è, com' è notissimo, la Grecia. Tutti sanno che PLATONE, interrogato su ciò di cui si occupasse Dio, rispose « Dio geometrizza »!

Non intendo presentare qui l' evoluzione subìta dalla Geometria, ma prima di passare ad altre considerazioni, mi si permetta menzionare TALETE MILESIO, PITAGORA, EUCLIDE, ARCHIMEDE, APOLLONIO, TOLOMEO, PAPPO (4).

Nè i Romani, famosi conquistatori e legislatori, apprezzarono la bellezza e l' importanza della Geometria; MANLIO SEVERINO BOEZIO, il più grande matematico romano, non

---

(3) *Papyrus Rhind* del British Museum, tradotto e commentato: da A. EISENLOHR, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (Leipzig, 1877); e da E. PEET, *The Rhind Mathematical Papyrus* (Liverpool, 1923).

(4) Cfr. G. LORIA, *Le scienze esatte dell' antica Grecia* [Milano, 1914].

solo nulla inventò, ma la sua cultura geometrica non superava i primi libri degli *Elementi di* EUCLIDE (5).

3. Chiusa questa breve parentesi storica, ritorniamo alle conclusioni fatte poco sopra (n. 1), e affinchè esse divengano più chiare parlerò, un pochino, di un famoso postulato: *il postulato della parallela.*

Esso fu chiamato dal D' ALEMBERT « la croce e lo scandalo degli elementi di Geometria »! Ed aveva ragione; « ragione », intendiamoci, considerando la Geometria quale era allora. Infatti questo postulato non poteva essere provato sperimentalmente; d' altra parte veniva attribuito alla retta, ente che era considerato come qualche cosa di esistente fuori di noi, onde: non poteva esso essere sbagliato? E in tal caso tutta la Geometria da esso dedotta sarebbe caduta!

Di questo pericolo si accorse lo stesso EUCLIDE; ciò non è detto esplicitamente, ma si comprende. Infatti egli, nei suoi celebri *Elementi,* applicò il detto postulato un po' tardi, e precisamente quando non potè farne a meno.

Anche durante il periodo aureo della Geometria greca (n. 2) fu notata la necessità d' investigare su questo argomento, e ciò si rileva dai commenti, agli *Elementi* di EUCLIDE, dovuti ad APOLLONIO PERGEO.

Molti furono gli inutili conati che i geometri, di vari secoli, fecero per trasformare quel postulato in un teorema, cioè per dimostrarlo. Il primo tentativo si deve all' arabo

---

(5) Recentissimi studi storici ci assicurano che il re TEODORICO, affinchè BOEZIO non figurasse come un martire politico, prendendo pretesto dagli studî matematici di lui, scarsi ma veramente singolari in quell' età di barbarie, impose ai senatori che lo condannassero sotto l' ignominiosa accusa di avere aspirato alle alte cariche dello stato mediante arti magiche.

NASSIR-EDDIN (come ci fece noto il WALLIS). Rammento inoltre soltanto, perchè di grande importanza, il tentativo fatto dal gesuita GEROLAMO SACCHERI (6). Egli, nel 1733, esaminò anche la ipotesi che per un punto passino due rette parallele ad una retta data, ovvero non ne passi alcuna, assegnando così le basi della Geometria *non euclidea*. Giustamente quindi E. BELTRAMI chiamò il SACCHERI un *precursore* di LEGENDRE e di LOBATSCHEWSKY (7). Ma suggestionato dal preconcetto che la Geometria euclidea fosse la sola possibile, e che (come poi affermò il KANT) il postulato dell' unicità della parallela fosse una verità necessaria. si ritirò spaventato nel vedere innanzi a sè un nuovo mondo, e s' ingegnò, sbagliando, di dimostrare che le due ipotesi sopra dette erano assurde, affaticandosi così ad abbattere il bell' edificio che egli aveva costruito! (8).

Com' è noto il vero fondatore della Geometria non euclidea fu GAUSS; ma egli non pubblicò i suoi studî su questo argomento, perchè temeva « le strida dei Beoti »; sono parole sue, e per lui i Beoti erano i filosofi.

La verità è che il postulato (dell' unicità) della parallela non è conseguenza dei postulati che lo precedono, onde esso non è dimostrabile. Inoltre, siccome esso e i due relativi alle due ipotesi sopradette, non sono in contradizione con i postulati precedenti, così considerando la Geometria come si fa

---

(6) G. SACCHERI, *Euclides ab omni naevo vindicatus...* [Milano, 1733].

(7) L' opera citata in (6) fu tradotta in inglese da G. B. HALSTED, e in tedesco da F. ENGEL e P. STÄCKEL.

(8) Analogamente il cardinale GERDIL nel 1806 avrebbe potuto dedurre, da alcune sue osservazioni, l' esistenza dei numeri transfiniti di G. CANTOR, se non fosse stato preoccupato di combattere l' idea dell' infinito attuale!

oggidì, cioè come un sistema logico ipotetico deduttivo, possiamo a nostro arbitrio scegliere l'uno o l'altro dei tre postulati in esame. Si ottengono così, oltre l'ordinaria Geometria (euclidea), altre due Geometrie che SCHOPENHAUER chiamò, a torto, la parodia e la caricatura della Geometria di EUCLIDE! Esse sono: quella di LOBATSCHEWSKY-BOLYAI, nella quale per un punto passano due, e quindi infinite, rette parallele ad una retta data, e quella di RIEMANN, nella quale per un punto non passa alcuna parallela ad una retta data. Tutte e tre queste Geometrie sono esatte, affermazione questa che sarebbe assurda se la Geometria non fosse oramai una scienza indipendente da ogni osservazione fisica.

4. Precedentemente fu detto (n. 1) che la Geometria si applica, con grande utilità, al mondo in cui viviamo, allo spazio che ci circonda; ora mi si potrebbe domandare a quale di queste tre Geometrie conviene dare la preferenza in tali applicazioni.

Ebbene, per quanto accurate siano le nostre misure, esse sono sempre approssimate; e per l'approssimazione che ordinariamente si raggiunge è la Geometria euclidea quella da preferire. Ma ciò non toglie che un giorno, se gli strumenti di misura saranno talmente migliorati da apprezzare grandezze estremamente piccole, potremmo avere la sorpresa di vedere che la Geometria più adatta alle nostre applicazioni pratiche non sia la euclidea, ma una delle rimanenti due!

5. Un' altra Geometria, logicamente possibile ma non sperimentabile, è la *Geometria non archimedea,* scoperta da G. VERONESE, e poi ritrovata da HILBERT. Ma, per amor di brevità, di questa non parlerò, preferendo discutere di un altro assai interessante argomento.

6. Una teoria geometrica che al profano sembra addirittura un vaniloquio, è quella degli spazi a più di tre dimen-

sioni (detti *iperspazi*); e spesso mi si dice: ma lo spazio a 4 dimensioni non esiste, quindi nessun valore ha la Geometria che di esso si occupa!

Comincio col ripetere che la Geometria non si occupa di esseri fisici, quindi lo spazio a 4 dimensioni, del quale tratta la Geometria, è uno di quegli enti che, come si disse (n. 1), hanno la loro esistenza soltanto nel nostro intelletto. Comunque, procediamo con ordine.

7. Sia data una retta S_1 (9) e ammettiamo, per postulato, che esista un punto P fuori di essa; tutte le rette ciascuna passante per un punto di S_1 e per P, costituiscono una figura S_2 che è chiamata *piano* o *spazio geometrico a 2 dimensioni*. Dato un piano S_2 ammettiamo, per postulato, che esista un punto Q fuori di esso; tutte le rette ciascuna passante per un punto di S_2 e per Q costituiscono un figura S_3 che è chiamata *spazio geometrico a 3 dimensioni* o *spazio ordinario*.

Fin qui tutti i postulati ammessi hanno, per così dire, un' immagine fisica e quindi non urtano la suscettibilità di alcuno; ma ecco che le cose ora cambiano col seguente postulato:

« Dato uno spazio S_3 esiste un punto R fuori di esso ».

Questo postulato viene accolto con diffidenza dai non matematici, perchè alla parola « spazio » la loro mente pensa subito allo « spazio fisico », e quindi esso postulato sembra assurdo, perchè la nostra mente non sa concepire un corpo (sia pure) piccolissimo (punto) che sia fuori dell' ambiente in

---

(9) Le rette parallele, e quindi il *punto improprio* della retta, si possono definire prima del piano; così fece VERONESE, e così, in modo completamente diverso, ho fatto io nei miei *Principî* (1), e nel mio *Trattato di Geometria elementare* [S. E. I., Torino].

cui viviamo. Ma non v'è assurdo perchè questo postulato non é in contradizione con alcuna delle proposizioni precedenti (ciò che si dimostra in modo rigoroso). Il torto è di chi confonde lo spazio geometrico a 3 dimensioni, ente che ha vita soltanto nel nostro intelletto, con lo spazio fisico che ne è una grossolana immagine!

Ciò posto, tutte le rette ciascuna passante per un punto di S_3, e per il punto R, costituiscono una figura S_4 che è chiamata *spazio geometrico a 4 dimensioni.*

Oramai è chiaro che procedendo analogamente si può definire lo *spazio geometrico* S_r *ad* r *dimensioni;* esso esiste perchè non è altro che una purissima concezione del nostro intelletto, e nella sua genesi non esistono proposizioni tra loro incompatibili, mentre (n. 1) nel nostro intelletto, ripetiamo, soltanto l'assurdo non esiste (10).

8. A questo punto mi si potrebbe obbiettare: Sta bene, la geometria iperspaziale avrà un'importanza teorica; ma che ne facciamo di essa nella pratica della vita?

Già a questa domanda potrei cominciare col rispondere con qualche cosa di analogo alle seguenti parole di JACOBI:

« Per l'onore dell'intelletto umano, un problema della teoria dei numeri vale quanto una questione sul sistema cosmico! »

Comunque: che la Geometria del piano e dello spazio ordinario sia utile per le sue interessanti applicazioni alla

---

(10) STUART-MILL diceva che la retta del matematico non esiste in natura, a cui CAYLEY rispondeva che questa affermazione non si potrebbe fare se non si avesse il concetto (esatto) della retta, onde questa esiste. La verità è che ambedue avevano ragione; il primo parlava di retta fisica, il secondo di retta geometrica, cioè parlavano di cose diverse.

Fisica, all' Ingegneria, all' Astronomia (11), siamo tutti d'accordo; ma allora ecco subito dimostrata la non meno grande importanza della Geometria iperspaziale: si sappia che essa serve, anche, a scoprire nuovi teoremi della Geometria del piano e dello spazio ordinario, cioè di quella Geometria della quale a momenti tutti d'accordo ne abbiamo affermato l'utilità.

Ma la Geometria iperspaziale si applica anche direttamente alla Fisica; p. es. BELTRAMI ed HERTZ ne hanno dimostrato l'utilità nei problemi di Meccanica che comportano più che tre gradi di libertà; e lo spazio geometrico a 4 dimensioni è stato utile recentemente per la teoria della relatività di EINSTEIN, la quale è una Geometria non euclidea di uno spazio a 4 dimensioni.

E poi chi ci dice che un giorno la Geometria iperspaziale non possa essere utile applicandola direttamente? Quando circa 18 secoli or sono APOLLONIO scrisse la teoria delle coniche, sembrava che questa dovesse avere soltanto un'importanza teorica, e nessuno pensava che dopo molti secoli si dovessero ritrovare le coniche nelle orbite dei pianeti e delle comete, e nelle traiettorie dei proiettili! E le superficie del 4° ordine non sembravano inutili prima che fossero incontrate nella teoria ondulatoria della luce?

---

(11) A proposito di applicazioni matematiche, rammento che B. SPINOZA tentò di fondare l'etica con metodo geometrico; cfr. *Ethica geometrico more demonstrata* (Leipzig, 1875). LEONARDO credeva che nessuna certezza è dove non si può applicare una delle scienze matematiche [cfr.: *Les manuscripts de Léonard da Vinci* de la Bibliothèque de l'Institut G. 96 (Paris, Ravaisson, 1890)]. Rammentiamo, inoltre, che NAPOLEONE attribuiva grande potere alle matematiche, ritenendo che al loro progresso sia legato quello dello Stato [*Correspondance de Napoléon*, T. 24 (1868), p. 112]; infine: COMPTE diceva che la scienza matematica deve costituire il vero punto di partenza di ogni educazione scientificamente razionale [*Cours de Philosophie positive* (Paris, 1869)].

9. E poi: siamo proprio sicuri che non esiste lo spazio fisico a 4 dimensioni?

Lo spazio geometrico a 3 dimensioni ammette un'immagine sensibile: lo spazio fisico in cui viviamo, cioè a questo si possono applicare (con approssimazione sodisfacente alle esigenze della vita) i fatti geometrici di quello. Ora si domanda: esiste uno spazio fisico, molto più ampio di quello in cui viviamo, che possa essere considerato quale immagine dello spazio geometrico a 4 dimensioni?

Egregi Signori, se Loro avranno la pazienza di ascoltarmi ancora, noi faremo insieme, mentalmente, una passeggiatina in siffatto spazio, ammesso che esista, osservando alcuni fatti che *non sono possibili* nell' ambiente a 3 dimensioni in cui si svolge la nostra vita.

10. A scopo di chiarezza consideriamo primieramente un piano e in esso supponiamo che esista un animaletto intelligente (a 2 dimensioni). Se intorno ad esso noi disegniamo p. es. un cerchio, esso giudicherà impossibile uscirne senza incontrarlo; noi lo guarderemmo con commiserazione e rideremmo della sua ignoranza, perché noi vediamo che basterebbe portare l'animaletto in un punto M fuori del piano, e poi da questo in un punto N, del piano, esterno al cerchio. Analogamente noi giudichiamo impossibile fare uscire un oggetto da un ambiente perfettamente chiuso senza attraversare le pareti di questo; ma se esistesse lo spazio fisico a 4 dimensioni, un essere intelligente, che possa concepirlo, potrebbe (12) portare l'oggetto in un punto M fuori del nostro spazio, e ciò senza incontrare le pareti dell' ambiente chiuso, e poi da

(12) G. VERONESE, *Prolusione: Sui principali metodi in geometria* (Padova, 1882).

M portarlo in un punto *N* del nostro spazio ma fuori di questo ambiente.

Gli spiritisti concluderebbero subito che lo spazio fisico a 4 dimensioni esiste perchè essi credono che gli spiriti e il « medium » in *trance* abbiano la proprietà di far penetrare corpi materiali in un ambiente perfettamente chiuso, e da questo farli uscire, senza attraversarne le pareti. Ma si è sicuri della sincerità di siffatti fenomeni spiritici? Certo che la penetrazione di un corpo solido entro p. es. una scatola perfettamente chiusa, sarebbe una dimostrazione dell'esistenza dello spazio fisico a 4 dimensioni.

11. Ritorniamo all'animaletto bidimensionale (n. 10).

Se ad esso mettiamo vicinissimo un essere intelligente ma in modo che questo non abbia alcun punto nel piano di quello, l'animaletto non se ne accorgerà affatto, perchè esso, giacchè non concepisce la terza dimensione, mai staccherà il suo sguardo dal piano in cui vive.

Analogamente, se esistesse lo spazio fisico a 4 dimensioni, potrebbero esistere esseri intelligenti a noi vicinissimi, che ci vedono, che vigilano sulla nostra vita, ma dei quali noi non ci accorgiamo perchè, non concependo la quarta dimensione, mai noi stacchiamo il nostro sguardo dallo spazio a 3 dimensioni in cui viviamo.

12. Ancora: si dimostra che date due figure simmetriche rispetto ad un piano, servendoci dello spazio geometrico a 4 dimensioni si può fare rotare una di esse, intorno a questo piano in modo da farla poi coincidere con l'altra, mentre ciò è, in generale, impossibile se si rimane sempre nello spazio geometrico a 3 dimensioni. Ne segue che se esistesse lo spazio fisico a 4 dimensioni, un uomo, p. es., dopo una conveniente passeggiatina in questo, potrebbe trovarsi poi con tutti i suoi organi disposti tali e quali come nella sua immagine

rispetto ad uno specchio piano (13). Si è mai visto un siffatto fenomeno?

13. Si sappia, inoltre, che, sempre nell'ipotesi dell'esistenza dello spazio fisico a 4 dimensioni, ogni superficie materiale si potrebbe trasformare in modo che la sua faccia interna diventi esterna e viceversa (14).

Data una corda con un nodo e fissata nei suoi estremi, si potrebbe sciogliere il nodo senza staccare questi estremi dai punti in cui sono fissati (15).

Si potrebbe vedere, si potrebbe toccare qualsivoglia punto, p. es., del nostro corpo senza fare alcun taglio; basterebbe mettere gli occhi, le mani fuori dello spazio fisico a 3 dimensioni in cui viviamo; i famosi raggi X sarebbero superflui! E infatti un segmento che abbia un punto in uno spazio ordinario e un punto fuori di questo, non ha con questo medesimo alcun altro punto comune (onde, in particolare, esso non incontrerà ulteriormente il nostro corpo).

Infine lo ZÖLLNER narra che in una seduta spiritica il « medium » fece passare un anello attraverso l'asta di un tavolino a tre piedi; fenomeno questo che subito si spiega se si ammette l'esistenza dello spazio fisico a 4 dimensioni. E invero basterà imprimere all'anello un moto di traslazione

---

(13) Così nel brioso romanzo di WALLS, *The Plattner Story and Other* [Tauchitz Edition, Leipzig, 1900, vol. 3436].

(14) NEWCOMB, *Note on a Class of transformations which Surfaces may undergo in Space of more than Three Dimensions* [American Journal of Mathematics (1878)].

(15) KLEIN, *Mathematische Annalen*, Bd. 9 (1876), pag. 478, e DURÈGE, *Ueber die Hoppe'sche knotencurve* [Sitzungsb, der k. Akad. d. Wiss. zu Wien, mathematische Classe (1880)]. — Cfr. pure E. JOUFFRET, *Mélanges de géom. à 4 dimensions* (Paris, 1906).

secondo, p. es., la perpendicolare al nostro spazio (16), perchè così facendo l'anello, appena mosso, avrà tutti i suoi punti fuori di questo spazio, onde esso non potrà incontrare in alcun punto il tavolino e i piedi di questo; poi, se si vuole, si potrà rimettere l'anello nel nostro spazio in una qualunque posizione.

14. Oltre alla Geometria iperspaziale abbiamo, assai recentemente, anche una Geometria più ampia, e precisamente la Geometria degli spazi ad un numero *infinito* di dimensioni da me chiamati *ultraspazi*, da me che dal punto di vista geometrico sono stato il primo ad intuirli e a cominciarne lo studio (17). Gli ultraspazi esistono (n. 1), così come esiste il piano, la retta. La loro teoria si sviluppa ammettendo, p. es., il seguente postulato: « dato un qualunque iperspazio, esiste

---

(16) In generale: secondo una direzione non contenuta nel nostro spazio a 3 dimensioni in cui viviamo.

Oltre ai sopradetti fenomeni che, se veri, troverebbero la loro spiegazione nell' esistenza dello spazio fisico a 4 dimensioni, altri, certamente veri, verrebbero spiegati in modo più chiaro. KARL PEARSON pensa l' atomo come un filetto d' etere traversante perpetuamente il nostro spazio, con una densità sottoposta a certe variazioni periodiche; da ciò si spiegherebbero facilmente molte azioni quali p. es. le ottiche, le elettriche, quelle di attrazione. Non mancano, superfluo dirlo, applicazioni che sono vere stramberie; HINTON pensò che la nascita, lo sviluppo, la vita, la morte degli esseri animati di questo mondo, non sono altro che il passaggio di corpi a 4 dimensioni attraverso il nostro spazio!

(17) Cfr. i miei lavori: *Saggio di Geometria ad infinite dimensioni* [Atti dell'Accademia Gioenia, Catania, serie 5ª, vol. X]; *Preliminari di Geometria proiettiva ad infinite dimensioni* [Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXXVI]; *Ultraquadricas* [Bollettino dell' Accademia Gioenia, Catania, fasc. 52]; *Geometria ad infinite dimensioni* [Atti dell' Accademia Gioenia, Catania, serie 5ª, vol. XIV]; *Preliminari di una Geometria metrica ad infinite dimensioni* [Bollettino dell' Unione Matematica Italiana, Bologna, anno IV, N. 2].

un punto fuori di esso ». Così facendo si ottiene un ambiente, S_{-0}, tale che tutte le rette perpendicolari ad un S_r in un dato punto (proprio) di questo, costituiscono uno spazio geometrico (distinto dall'*ambiente assoluto* S_{-0}) ad infinite dimensioni, cioè un ultraspazio S_{-r} (18).

15. In quanto all' esistenza degli iperspazi e ultraspazi fisici, dirò che soltanto qualche strano fenomeno, come quelli ai quali ho sopra accennato (n. 10, 11, 12, 13), potrebbe dimostrarcene l'esistenza. A tal proposito mi domando: Si è veramente sicuri che questi strani fenomeni non sono mai accaduti, cioè che proprio *tutti* siano stati conseguenza di abilissimi trucchi ?

Non si creda che io sia uno spiritista, però rammento che tre scienziati dopo una seduta con la famosa « medium » Eusapia Paladino, per la quale seduta avevano prese tutte le dovute cautele, conclusero: « Noi non crediamo agli spiriti, ma non possiamo negare i fenomeni che abbiamo osservati, fenomeni che noi crediamo dovuti a cause *naturali* ancora non conosciute ».

Comunque io mi permetto formulare una domanda, non intendendo affatto di risolvere qui una siffatta questione difficilissima.

Perchè lo spazio fisico in cui si agitano tutti gli esseri dell' universo deve essere proprio a *tre* dimensioni ? Non potrebbe darsi che esso sia ad un numero infinito di dimensioni, sia cioè un *ultraspazio fisico* ? Il fatto che esso ci sembra

---

(18) Il numero r è stato da me chiamato il *rango* dell'ultraspazio S_{-r}. L'importanza di questo carattere è che esso, assunto però col segno negativo, si comporta, per l' immersione e l' intersezione, tale e quale come la dimensione per gli iperspazi. Si sappia che esistono, inoltre, ultraspazi a *rango infinito*.

a. 3 dimensioni dipenderebbe soltanto dai nostri limitatissimi sensi (19).

Del resto, seguendo il fisiologo VON CYON (20), pare che i canali semicircolari non abbiano per noi una funzione uditiva, ma siano, invece, l'organo di un sesto senso: il senso di spazio.

P. e. i piccioni viaggiatori, che hanno così bene sviluppato il senso di spazio, lo perdono se essi vengono privati dei detti canali semicircolari. Così pure le rane, se ad esse si lascia un solo canale semicircolare per ogni orecchio, si potranno muovere soltanto in linea retta.

Ancora: i cosiddetti topi danzanti giapponesi, studiati dal RAWITZ e dal VON CYON, hanno soltanto una coppia di canali semicircolari sviluppati regolarmente; ebbene essi non possono muoversi in linea retta, ma rapidamente con movimento circolare (21).

Su questi fatti non v'è dubbio; circa l'interpretazione data ad essi si può discutere, e precisamente: se il fisiologo VON CYON è nel vero, allora un animale che avesse quattro coppie di canali semicircolari, potrebbe concepire lo spazio fisico a 4 dimensioni, onde l'esistenza di questo, e noi vedremmo sparire quest'animale da una stanza completamente chiusa senza attraversarne le pareti! Ma esiste un siffatto animale?

---

(19) A titolo di curiosità dirò che ZÖLLNER pubblicò cinque grossi volumi nei quali fa del nostro mondo l'ombra di un altro mondo ma a 4 dimensioni; gli spiriti sono gli abitatori di questo, onde le loro apparizioni e scomparse (n. 10) dai nostri sguardi.

(20) E. VON CYON, *Das Ohrlabyrinth als Organ des mathematischen Sinne für Raum und Zeit* [Berlin, Springer (1908)].

(21) Nè possono risalire un piano inclinato se non al buio.

Comunque è interessante il fatto che per ogni orecchio i tre canali semicircolari sono disposti in tre piani *a due a due* quasi *perpendicolari;* da qui, seguendo VON CYON, le tre dimensioni: lunghezza, larghezza, altezza.

16. Com' è noto, la Geometria descrittiva studia, mediante proposizioni di Geometria piana, gli esseri dello spazio geometrico a 3 dimensioni; essa fu creata da MONGE, alludendo al quale LAGRANGE diceva: « Con la sua geometria quel diavolo d' uomo si renderà immortale » ; e non a torto, perchè la Geometria descrittiva si applica con grande utilità in quelle Arti nelle quali interessa la precisione della forma.

Ebbene, abbiamo anche la Geometria descrittiva dello spazio geometrico a 4 dimensioni, e non soltanto, per analogia, essa può studiare gli esseri di questo, mediante considerazioni di Geometria dello spazio ordinario (22), ma anche mediante Geometria piana, cioè con figure in un foglio di disegno (23).

Anche per un qualunque iperspazio abbiamo la relativa Geometria descrittiva (24).

17. Sia la Geometria non euclidea, sia questa iperspaziale, ambedue vaniloquî per i profani cocciuti, furono in qual-

---

(22) G. VERONESE, *Sopra la geometria descrittiva a quattro dimensioni* [Atti dell'Istituto Veneto, serie 5ª, vol. VIII]; G. LORIA, *Sur quelques problèmes elementaires de la geometrie descriptive a 3 et 4 dimensions* [Arch. f. Math., serie 3ª, vol. II (1902)]; H. DE VRIES, *Die Lehre der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume* [Leipzig (1905)].

(23) Cfr. la (22) e la mia Nota *Sulla proiezion quotata, sopra un piano, dello spazio da quattro dimensioni* [Catania, Monaco e Mollica (1904)].

(24) U. PERAZZO, *Sopra la geometria descrittiva in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni* [Atti della R. Accademia delle Scienze, Torino, vol. 41 (1906)].

che modo profetizzati da KANT nelle sue parole: « Una scienza di tutte le specie possibili di spazî, sarebbe senza dubbio la Geometria più elevata cui possa aspirare un intelletto finito » (25).

18. Vogliamo ora parlare un po' della bellezza ed eleganza degli esseri geometrici! Proprio così.

Già potremmo ripetere le parole di CROCE: « Ogni opera di scienza è insieme opera d'arte », avvertendo che per noi la parola « scienza » non si riferisce, come per il CROCE, soltanto alla filosofia.

Non esiste serio cultore di Matematica per cui non sia bella la Geometria Proiettiva, i cui germi esistevano nell'opera di APOLLONIO e nelle regole di prospettiva dei grandi pittori del Rinascimento, p. e. nel trattato di PIER DELLA FRANCESCA. Ma la culla di questa elegantissima scienza fu nelle prigioni di Saratoff, luogo semibarbaro sulle rive del Volga. PONCELET, che da capitano del genio prese parte alla spedizione di NAPOLEONE nella Russia, fatto prigioniero dai Russi nel 1813 al passaggio del Dnieper, fu internato a Saratoff, e ivi egli, nel silenzio e nella tristezza della prigionia, preparò quei principî che poi sviluppò nel *Traité des propriétes projectives des figures* (pubblicato nel 1822), e nelle sue ricerche sulle figure polari-reciproche.

Non è qui il caso di presentare esemplari di esseri geometrici, per i quali possa veramente dirsi « son belli »; non parlo delle figure piane, alcune delle quali, per la loro forma curiosa e graziosa, sono assunte dai Giapponesi come veri or-

(25) KANT, *Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen* Kräfte, § 10 (1747).

namenti (26). Mi limito a menzionare una famosa superficie del 4° ordine e dello spazio ordinario, la quale possiede infinite curve di quelle dette coniche; ebbene queste curve non sono in essa segnate a caso, ma godono di questa elegante proprietà: esse si comportano come le rette di un piano proiettivo, cioè per due punti distinti della superficie passa una ed una sola di quelle coniche, e due qualunque distinte di queste hanno un solo punto comune. Chi conosce un po' di Geometria superiore, ha già compreso che io ho parlato della *superficie romana di* STEINER, cioè di quella superficie intuita e studiata da questo grande geometra nel 1844 durante il suo soggiorno a Roma (27).

Con questo esempio ho voluto significare che la bellezza di un essere geometrico non consiste soltanto nella sua forma (della quale, del resto, non potremmo parlare se esso è immerso in un iperspazio), ma specialmente nelle sue proprietà, cioè nel modo di comportarsi tra loro degli esseri geometrici che in esso vivono.

19. Oltre alla bellezza possiamo ammirare l' eleganza dei procedimenti che guidano alla scoperta di nuovi esseri geometrici, o alla dimostrazione di nuove proprietà di quelli conosciuti.

È chiaro che se un procedimento è tale che mediante poche ma valide osservazioni ci fa arrivare allo scopo più rapidamente di un altro, per il quale si è dovuto ricorrere a molte e disparate teorie, noi diremo che il primo procedimen-

---

(26) Si ha così, in quella terra d' oriente, una geometria che potrebbe essere chiamata *geometria dei ventagli*, analoga alla nostra geometria del triangolo. Cfr. D. E. SMITH and J. MIKAMI, *A History of Japanese Mathematics* [Chicago (1914)].

(27) È noto che questa superficie è proiezione della famosa superficie di VERONESE.

to è « elegante », mentre non lo è il secondo. E in proposito mi piace rammentare che F. BERNSTEIN, per giudicare quale dimostrazione di un teorema sia la più elegante, consiglia di paragonarla a tutte quelle nelle quali si fa uso dei medesimi postulati, e di assegnare il premio a quella dimostrazione in cui ad uno determinato di essi si ricorre il minor numero di volte. Questo criterio applicato, p. es., al teorema di PITAGORA, fa concludere che tra le numerose dimostrazioni fondate sul concetto di equiscomponibilità, la più elegante è la dimostrazione dell'arabo ANARIZIO (uno dei commentatori degli *Elementi* di EUCLIDE).

Si osservi che il geometra mentre per la scoperta di nuove verità deve servirsi di qualunque procedimento pur di arrivare allo scopo, quando vuol dare assetto definitivo ad una data teoria, fa opera più elegante se si serve soltanto di rigorosi procedimenti *geometrici* (28). E invero mentre le dimostrazioni analitiche convincono ma non illuminano (così come le dimostrazioni apagogiche, dette comunemente « per assurdo »), le geometriche mettono in viva luce la misteriosa catena di verità (CHASLES) che unisce l'ipotesi alla tesi del teorema che si vuol dimostrare. È questa la ragione per la quale spesso i lavori di Geometria pura *sembrano* facili, perchè essi tengono una via veramente luminosa per arrivare allo scopo; ne segue che non è facile trovare nel lettore tale competenza geometrica da intuire le grandi difficoltà in essi superate ed apprezzarne, quindi, il vero merito.

---

(28) ARCHIMEDE in un interessante suo scritto di metodologia, del quale recentemente fu scoperto un frammento, distingue due « metodi », di scoperta il primo, di dimostrazione il secondo; ed egli vuole puro e rigoroso questo, completamente arbitrario quello.

Io chiamerei *Geometria* soltanto la sintetica, quella che comunemente è chiamata « pura » (29); la Geometria Analitica, la Geometria Differenziale non sono altro che *importantissime* applicazioni dell' Analisi alla Geometria; e mi piace confortare queste mie parole col rammentare che MONGE chiamava « *Application de l' Analyse à la Géométrie* » precisamente la Geometria Differenziale.

Per maggior chiarezza: è noto che RUFFINI dimostrò che le equazioni algebriche di grado superiore al 4° non si possono risolvere algebricamente (cioè con operazioni radico razionali), e che BRIOSCHI risolse quella di 5° grado mediante funzioni ellittiche. Diremo per ciò noi che il lavoro di BRIOSCHI è un lavoro di algebra? Certo che no; esso è un' importante applicazione della teoria delle funzioni ellittiche all' Algebra. Nella scala musicale dal *temperamento eguale* è $\sqrt[12]{2}$ l' intervallo costante tra due suoni che differiscano di un semitono, e questa costante si calcola applicando la teoria delle progressioni geometriche; diremo che così si è fatto un bel pezzo

(29) C. SEGRE, in *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche* [Rivista di Matematica (1891)], dice: « . . . Questi indirizzi *puri* sono veramente della massima importanza. È infatti fuor di dubbio che il matematico non può essere pienamente sodisfatto della conoscenza di una verità se non quando è riuscito a dedurla colla massima semplicità e naturalezza dal minor numero possibile di proposizioni note, di postulati indipendenti, evitando ogni ipotesi, ogni mezzo di dimostrazione che non appaia necessario per lo scopo... Oltre a ciò va notato come un fatto generale, che quando nelle ricerche si adopera un solo strumento, vietandosi espressamente l'uso di ogni altro, si è spesso condotti ad affinare ed a perfezionare quello usato, rendendolo così sempre più adatto a nuove scoperte. E fu per tal modo che il metodo sintetico, perfezionatosi nei grandi lavori con cui si formò la geometria moderna, riportò trionfi notevolissimi che dimostrarono appunto i vantaggi che spesso si hanno dall'uso prolungato di esso ».

di Musica? No, diremo che abbiamo fatto una bella applicazione dell' Algebra alla Musica (30).

20. Signori, non abuserò più della loro pazienza, soltanto mi preme smentire la leggendaria « freddezza » del matematico!

Se Loro sapessero la passione, l'entusiasmo che lo guida nelle sue ricerche, e ciò soltanto per la soddisfazione della verità svelata! Solo chi l'ha provate può comprendere le ansie, l'emozione nell'attesa di una verifica dell' esattezza di un nuovo teorema intuito! Che infinitamente dolorosa disillusione nel trovare errate alcune considerazioni fatte che, se nel vero, condurrebbero a risultati assai interessanti (31)!

Oltre di PONCELET, di cui sopra (n. 18) ho parlato, mi rammento di B. PASCAL il quale a dodici anni, appena conosciuta la definizione della Geometria, ricostruì da solo l'intero primo libro degli *Elementi* di EUCLIDE; e appena sedicenne scoprì il suo celebre teorema sull'*hesagramma misticum*, da cui può essere dedotta tutta la teoria delle coniche! HAMILTON inventò i suoi quaternioni, facendo così progredire notevol-

(30) C. SEGRE dice: « Ma si deve tener presente che alla Geometria, forse più che all'Analisi, occorre lasciar libera anzitutto la fantasia che guida alla scoperta: mentre è opera posteriore lo stabilire il tutto in modo rigoroso! » Cfr. *La Geometria d'oggidì e i suoi legami coll'Analisi* [Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker - Kongresses (1904)]. In quanto al rigore dei procedimenti geometrici, rammento che HILBERT, in un congresso internazionale tenuto a Parigi, protestò energicamente contro l' opinione che solo l' Analisi, e non la Geometria, sia suscettibile di trattazione rigorosa. Cfr. HILBERT, *Mathematische Probleme* [Göttinger Nachr (1900)].

(31) Quante vittime, in questo senso, ha fatto la razionalità o irrazionalità dell'ipersuperficie cubica dell' S_4! E che dire dell'involuzione irrazionale di ENRIQUES la quale sin ora, cioè dopo 19 anni, non ha ancora una sorella, non soltanto nell' S , ma in un S_r qualsivoglia?! Possibile che sia figlia unica? Ne sono assai perplesso!

mente la teoria dei numeri complessi ad un qualunque numero di unità, in Sicilia durante il suo viaggio di nozze!

LUIGI CREMONA nelle sue famose ricerche sulle trasformazioni che universalmente, con ragione, portano il suo nome (invece di quello di CAYLEY o di NOETHER anch'essi studiosi di questo argomento), nell'esporre un suo criterio per la costruzione di sistemi omaloidici di superficie, dice: « Ora mi sta a cuore di porre in chiaro *la facilità e la fecondità del metodo* che propongo ». Le parole « mi sta a cuore » dimostrano l'entusiastica passione di quel celebre geometra italiano. Infine: un giovanissimo la notte che precede il duello che lo condusse a morte, scrive con mano nervosa le prime idee sopra una teoria da lui intuita e della quale aveva egli compreso la grande importanza. Parlo di EVARISTO GALOIS; quella notte egli, più che temere la morte per sè, temè che la sua teoria, la figlia prediletta del suo ingegno, perisse con lui. Quella notte GALOIS si rese immortale!

21. Egregi Signori, mi si permetta che io ponga fine a questo discorso, esprimendo l'alta soddisfazione di osservare che nella Matematica, importantissima scienza onore e vanto dell'umano intelletto, la nostra Italia è tra le nazioni più progredite, e senza dubbio è la primissima nella Geometria (32).

Oggi, poi, in cui nuovi destini e ideali sempre nuovi sospingono la Nazione del Fascismo ad una maggiore valorizzazione dei ritrovati dell'attività intellettuale, possiamo avere la coscienza di un avvenire nostro più fecondo, anche nel campo delle Matematiche, sì che l'Italia possa continuare, rinnovata, la sua missione nel mondo.

---

(32) Si pensi, anche, alla moderna Geometria algebrica e alla Geometria proiettiva-differenziale, nelle quali rispettivamente brillano due astri di prima grandezza: F. SEVERI e G. FUBINI.